2023 年中科大创新班初试数学试题解答

2023-05-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_fac06b20f87609fd

1. 复数 z 满足 $z^{2023}-z-1=0$，求证：$|z|\leq 1$ 当且仅当 $\Re(z)\leq -\frac{1}{2}$.

证明：

由题意知：$z^{2023}=z+1$，两边取模得：$|z|^{2023}=|z+1|$. 于是

$$\begin{aligned}|z|^{4046}=&|z+1|^2\\=&(z+1)(\bar{z}+1)\\=&|z|^2+2\Re(z)+1\end{aligned}$$

即 $2\Re(z)+1=|z|^2(|z|^{2022}+1)(|z|^{2022}-1)$.

于是

$$\begin{aligned}&\Re(z)\leq -\frac{1}{2}\\\iff&2\Re(z)+1\leq 0\\\iff&|z|^2(|z|^{2022}+1)(|z|^{2022}-1)\leq 0\\\iff&|z|\leq 1\end{aligned}$$

1. 设 $\overrightarrow{\alpha_i}$ $(1\leq i\leq 5)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的五个非零向量. 求证：存在非零向量 $\overrightarrow{\beta}\in\mathbb{R}^3$，使得存在 $1\leq j_1<j_2<j_3<j_4\leq 5$，满足 $\overrightarrow{\beta}$ 与 $\overrightarrow{\alpha_{j_k}}$ 的夹角均不超过 $\frac{\pi}{2}$ $(k=1,2,3,4)$.

证明：

设 $\overrightarrow{\alpha_i}$ 的起点均为 O，终点分别为 A_i $(1\leq i\leq 5)$.

考虑平面 OA_1A_2，由抽屉原理，A_3、A_4、A_5 中必存在两点，在平面 OA_1A_2 的同侧（含平面上），不妨设为 A_3、A_4.

取平面 OA_1A_2 的法向量 $\overrightarrow{\beta}$，且使 $\overrightarrow{\beta}$ 指向 A_3、A_4 一侧，易知 $\overrightarrow{\beta}$ 满足题意.

1. 甲、乙两盒中各放 2 只兔子，一雌一雄. 称一次操作是从甲、乙盒中各随机抽一支兔子交换，记 n 次操作后甲、乙盒中仍各有一雌一雄的概率为 p_n. 求 p_n 及 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$.

解答：

若交换前笼子里均为一雄一雌，则一共有 4 种交换情况，其中两种交换后仍均为一雄一雌（雄换雄或雌换雌），另两种交换后笼子里为两雄和两雌. 而两雄和两雌的情况交换后必然回到均为一雄一雌. 于是有递推关系：

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+(1-p_n)=1-\frac{1}{2}p_n, p_0=1$$

于是 $p_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}(p_n-\frac{2}{3})$，可得

$$p_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\frac{2}{3}$.

1. (1)$x>0$，证明：$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$.
   (2)$0<a_1<\sqrt{3}$，$a_{n+1}=a_n-\frac{\sin a_n}{n+1}$. 证明：对任意正整数 n，都有 $na_n<\frac{3a_1}{3-a_1^2}$.

证明：

(1) 求导易证，实际上为 $\sin x$ 一阶和三阶的泰勒展开，是第二问的提示.

(2) 由题意知：

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1}=&(n+1)a_n-\sin a_n\\<&(n+1)a_n-a_n+\frac{1}{6}a_n^3\\=&na_n+\frac{1}{6}a_n^3\end{aligned}$$

于是 $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n+1}{n}$，归纳易知 a_n 递减，因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{na_n}<&\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}+\frac{a_n^2}{6n(n+1)a_{n+1}}\\<&\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}+\frac{a_n}{6n^2}\\<&\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}+\frac{a_1}{6n^2}\end{aligned}$$

累加得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1}-\frac{1}{na_n}<&\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_1}{6k^2}\\<&\frac{a_1}{6}\left(1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k(k-1)}\right)\\=&\frac{a_1}{6}\cdot\left(2-\frac{1}{n-1}\right)\\<&\frac{a_1}{3}\end{aligned}$$

解得：$na_n<\frac{3a_1}{3-a_1^2}$，证毕.

1. 将正整数去除完全平方数后由小到大排成一排，记作 $a_1, a_2, \cdots$. 比如 $a_1 = 2$，$a_2 = 3$，$a_3 = 5$，$\cdots$. 求证：对任意正整数 n，都有 $|a_n - n - \sqrt{n}| < \frac{1}{2}$.

证明：

满足 $k^2 < a_n < (k+1)^2$ 的 a_n 共有 $2k$ 个，此时有

$$2 + 4 + \cdots + 2(k-1) < n \leq 2 + 4 + \cdots + 2k$$

即 $(k-1)k < n \leq k(k+1)$，即 $(k - \frac{1}{2})^2 < k(k-1) + 1 \leq n \leq k(k+1) < (k + \frac{1}{2})^2$，故 $k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} \leq k + \frac{1}{2}$，易知等号无法取得.

在 a_n 之前共有 k 个完全平方数被去除，于是 $a_n = n + k$.

因此 $-\frac{1}{2} < a_n - n - \sqrt{n} < \frac{1}{2}$，证毕.