2023 年卡内基梅隆大学信息与数学竞赛（代数、数论组）

2023-04-12 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_faf7f4aadc48a3f7

代数、数论组

1.非负整数 a,b,c,d 满足

$$(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=2023.$$

求 $a^3+b^3+c^3+d^3$.

2.求 a 的最大值，使得存在实数 $b,c>1$，满足

$$a^{\log_b c}\cdot b^{\log_c a}=2023.$$

3.求

$$2022^{\left(2022^{\cdots^{\left(2022^{2022}\right)}}\right)}\pmod{111}$$

（一共有 2022 个 2022，结果为 0 到 110 之间的整数.）

4.10 个两两互素的不同正整数构成等差数列，求它们和的最小可能值.

5.抛物线 $\mathcal{P}$ 过点 $(0,0)$ 和 $(12,5)$，且准线为 $y=b$. 求 $|b|$ 的最小值.

6.三元非负整数组 (a,b,c) 满足 $2a+3b+5c=200$，设 $a+b+c=N$，求 N 的所有可能值之和.

7.计算：

$$\sum_{i=1}^{\varphi(2023)}\frac{\gcd(i,\varphi(2023))}{\varphi(2023)},$$

其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数.

8.已知 A,B,C,D 为 0 到 9 的自然数，且 $A\neq 0$，$\overline{ABCD}=\overline{CD}^2-\overline{AB}^2$. 求 $A+B+C+D$ 的所有不同值之和.

9.自然数 $n<2023$，且 $2n^2+3n$ 为完全平方数. 求 n 的所有可能值之和.

10.对给定的 n，考虑点 $(x,y)\in\mathbb{N}^2$，其中 $x\le y\le n$. 一只蚂蚁从 $(0,1)$ 出发，每次它从 (a,b) 移动到 (c,d)，满足 $bc-ad=1$，且使得 d 最大. 设 g_n 为蚂蚁能够移动的最大次数，求 $g_{2023}-g_{2022}$.

代数、数论组

1.非负整数 a,b,c,d满足 $$(a+b+c+d)(a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2})^{2}=2023.$$ 求 $a^{3}+b^{3}+c^{3}+d^{3}$. 2.求 a的最大值，使得存在实数 $b,c>1$，满足 $$a^{\log_{b}c}\cdot b^{\log_{c}a}=2023.$$ 3.求 $$2022^{\left(2022^{\cdot^{\cdot^{\left(2022^{2022}\right)}}}\right)}\pmod{111}$$ （一共有 2022个 2022，结果为 0到 110之间的整数.） 4.10个两两互素的不同正整数构成等差数列，求它们和的最小可能值. 5.抛物线 $\mathcal{P}$过点 $(0,0)$和 $(12,5)$，且准线为 $y=b$. 求 $|b|$的最小值. 6.三元非负整数组 (a,b,c)满足 $2a+3b+5c=200$，设 $a+b+c=N$，求 N的所有可能值之和. 7.计算：$$\sum\limits_{i=1}^{\varphi(2023)}\dfrac{\gcd(i,\varphi(2023))}{\varphi(2023)},$$其

中 $\varphi(n)$为欧拉函数. 8.已知 A,B,C,D为 0到 9的自然数，且 $A\neq 0$，$\overline{ABCD}=\overline{CD}^{2}-\overline{AB}^{2}$. 求 $A+B+C+D$的所有不同值之和. 9.自然数 $n<2023$，且 $2n^{2}+3n$为完全平方数. 求 n的所有可能值之和. 10.对给定的 n，考虑点 $(x,y)\in \mathbb{N}^2$，其中 $x\le y\le n$. 一只蚂蚁从 $(0,1)$出发，每次它从 (a,b)移动到 (c,d)，满足 $bc-ad=1$，且使得 d最大. 设 g_{n}为蚂蚁能够移动的最大次数，求 $g_{2023}-g_{2022}$.

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass{ctexart}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{enumitem}
\usepackage{geometry}
\usepackage{setspace}
\geometry{a5paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
\usepackage{hyperref}
\begin{document}
\title{2023 年卡内基梅隆大学信息与数学竞赛——中文翻译}
\author{程国根}
\maketitle
\newpage
\section*{代数、数论组}
\begin{spacing}{1.5}
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c204707h3041228p27382791}{\bf 1.} 非负整数 $a,b,c,d$ 满足
$$(a+b+c+d)(a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2})^{2}=2023.$$
求 $a^{3}+b^{3}+c^{3}+d^{3}$.
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c204707h3041233p27382807}{\bf 2.}求$a$的最大值，
↪ 使得存在实数$b,c>1$，满足
$$a^{\log_{b}c}\cdot b^{\log_{c}a}=2023.$$
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c204707h3041234p27382811}{\bf 3.} 求 $$
2022^{\left(2022^{\cdot ^ {\cdot ^{\cdot ^{\left(2022^{2022}\right)}}}}\right)} \pmod{111}
$$
（一共有 $2022$ 个 $2022$，结果为 $0$ 到 $110$ 之间的整数.）
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c204707h3041236p27382819}{\bf
↪ 4.}$10$个两两互素的不同正整数构成等差数列，求它们和的最小可能值.
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c204707h3041240p27382826}{\bf
↪ 5.}抛物线$\mathcal{P}$过点$(0,0)$和$(12,5)$，且准线为$y=b$. 求$|b|$的最小值.
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c204707h3041242p27382830}{\bf
↪ 6.}三元非负整数组$(a,b,c)$满足$2a+3b+5c=200$，设$a+b+c=N$，求$N$的所有可能值之和.
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c204707h3041246p27382838}{\bf 7.}计算：
↪ $$\sum\limits_{i=1}^{\varphi(2023)}\dfrac{\gcd(i,\varphi(2023))}{\varphi(2023)},$$其中$\varphi(n)$为欧拉函数.
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c204707h3041249p27382846}{\bf
↪ 8.}已知$A,B,C,D$为$0$到$9$的自然数，且$A\neq 0$，$\overline{ABCD}=\overline{CD}^{2}-\overline{AB}^{2}$.
↪ 求$A+B+C+D$的所有不同值之和.
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c204707h3041255p27382856}{\bf 9.}自然数$n<2023$，
↪ 且$2n^{2}+3n$为完全平方数. 求$n$的所有可能值之和.
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c204707h3041258p27382864}{\bf 10.}对给定的$n$，考虑点$(x,y)\in
↪ \mathbb{N}^2$，其中$x\le y\le n$. 一只蚂蚁从$(0,1)$出发，每次它从$(a,b)$移动到$(c,d)$，满足$bc-ad=1$，
↪ 且使得$d$最大. 设$g_{n}$为蚂蚁能够移动的最大次数，求$g_{2023}-g_{2022}$.
\end{spacing}
\end{document}
```