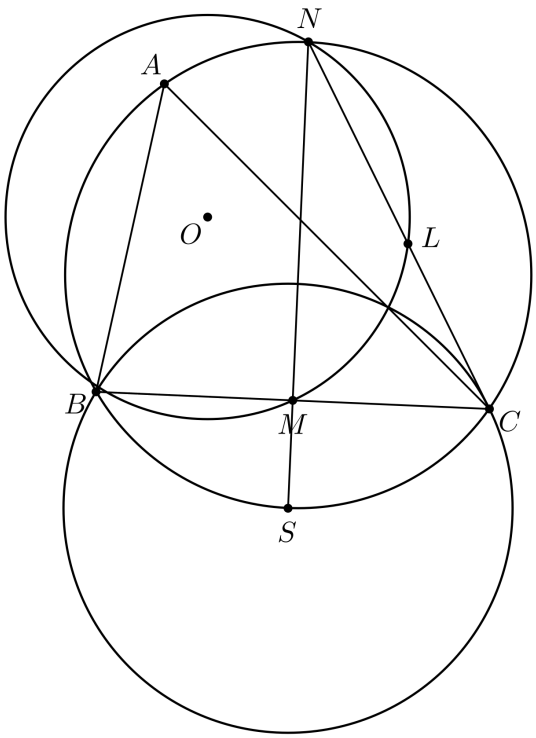
用圆幂定理证明一道两圆相切问题

2025-08-21　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_fb3b7a110b7c31fb

题目：

在 $\triangle ABC$ 中，BC 中点为 M，弧 BAC 的中点为 N．L 为 CN 上一点，$\triangle LMN$ 的外心为 O．求证：$\triangle LNO$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的 A-鸡爪圆相切．



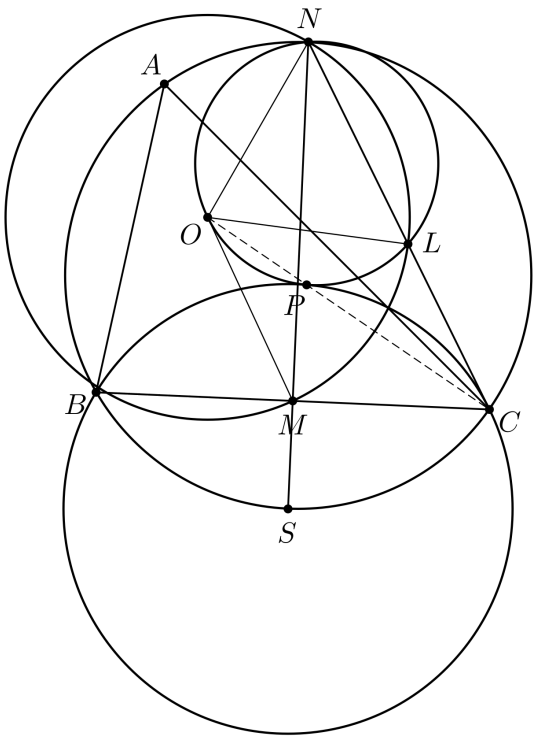
注：事实上，本题和点 A 无关．

一般而言，要证明两圆相切，主要分以下三步：

1. 猜切点的性质，通常为某个特殊点，或在某条直线上
2. 证明两圆都过这个切点，一般可设它在其中一个圆上，再去证明在另一个圆上
3. 证明两圆在该点处相切，可以过该点作其中一个圆的切线，证明切线也和另一个圆相切（这一步可以简化，象征性地作出切线即可）

在本题中，通过观察容易猜到，切点在线段 OC 上，下面进行证明．

证明：



设 OC 和 $\odot(LNO)$ 再次交于点 P，记 $\odot O$ 和 $\odot S$ 的半径分别为 R_1, R_2. 由圆幂定理知:

$$\begin{aligned} OP\cdot OC =& CO^2 - CP\cdot CO \\ =& CO^2 - CL\cdot CN \\ =& R_1^2 \\ =& SO^2 - SM\cdot SN \\ =& SO^2 - SC^2 \\ =& OS^2 - R_2^2 \end{aligned}$$

即点 P 在 $\odot S$ 上.

类似的,

$CP\cdot CO = CN\cdot CL = CO^2 - R_1^2$

即 $ON^2 = OP\cdot OC$，于是 $\triangle ONP \sim \triangle OCN$，$\angle PCN = \angle ONP$. 从而

$$\begin{aligned} \angle OPB =& \frac{1}{2}\angle BSC = \angle BCN \\ =& \angle BCP + \angle PCN \\ =& \angle BCP + \angle ONP \end{aligned}$$

即 $\odot(LNO)$ 和 $\odot S$ 相切于点 P，证毕.