2021 年普林斯顿数学竞赛（PUMaC）几何组

2022-04-16　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_fb62021a5cde4a1d

A 组

1. 一个圆内切于一个面积为 2024 的正八边形中，设其内接正八边形的面积为 $a+b\sqrt{c}$，其中 a，b，c 为整数，c 无平方因子．求 $a+b+c$ 的值．

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$AC=10$，$AD=\sqrt{33}$，其中 D 为 BC 中点．过 D 作 AB 和 AC 的垂线，分别交 AB、AC 于点 E、F．设 EF 的长度为 $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$，其中 a，b，c 为互质的整数，c 无平方因子．求 $a+b+c$ 的值．

3. 在以 O 为圆心的圆内，两条平行弦 AB 和 CD 的距离为 2，且 $AB=8$，$CD=10$，$AC<AD$．设 $\tan\angle BOD=\dfrac{a}{b}$，其中 a，b 为正整数，且 $\gcd(a,b)=1$．求 $a+b$ 的值．

4. 在梯形 $BCDE$ 中，$BE\parallel CD$，$BE=20$，$BC=2\sqrt{34}$，$CD=8$，$DE=2\sqrt{10}$．过点 E 作 BD 的平行线，过点 B 作 BE 的垂线，两条直线交于点 A．设 M 为对角线 BD 和 CE 的交点，X 为 AM 和 BE 的交点．设 $BX=\dfrac{a}{b}$，其中 a，b 为正整数，且 $\gcd(a,b)=1$．求 $a+b$ 的值．

5. 在五边形 $ABCDE$ 中，$AB\parallel ED$，$\angle EAB=\angle ABD=\angle ACD=\angle CDA$，$AB=8$，$AC=12$，$AE=10$．设 $\triangle CDE$ 的面积为 $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$，其中 a，b，c 为互质的整数，c 无平方因子．求 $a+b+c$ 的值．

6. 已知三个圆 ω_1，ω_2，ω_3，ω_3 和 ω_1 外切于点 C，和 ω_2 内切于点 D，且 ω_1 和 ω_2 相交于 A、B 两点．设 ω_1 的半径为 20，ω_2 的半径为 15，ω_3 的半径为 6．设 CD 和 AB 交于点 X，若 $AB=24$，$CX=\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$，其中 a，b，c 为互质的整数，c 无平方因子．求 $a+b+c$ 的值．

7. $\triangle ABC$ 的三边长 $AB=13$，$AC=17$，$BC=20$．点 E 为 B 在 AC 上的投影，点 F 为 C 在 AB 上的投影．$\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 再次相交于点 P．设 $AP=\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$，其中 a，b，c 为互质的整数，c 无平方因子．求 a 的值．

8. 锐角 $\triangle ABC$ 的三边长 $AB=7$，$BC=12$，$AC=10$，内切圆 ω 和 AB 切于点 F，和 AC 切于点 E，EF 和 BC 相交于点 X．设 $\angle BAC$ 的平分线将 EX 中点和 C 所连的线段所分成的两段之比为 $\dfrac{a}{b}$，其中 a，b 为正整数，且 $\gcd(a,b)=1$．求 $a+b$ 的值．

B 组

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=30^\circ$．X 为 A 在 BC 上的投影，Y 为 C 在 AB 上的投影．若 $AX=20$，$CY=22$，求平行四边形的面积．

2. 一个圆柱体的高为 20，底面半径为 5，一个垂直于底面的平面将圆柱体分成两部分，截面的面积为 $100\sqrt{2}$. 设较大的那一部分的体积为 $a+b\pi$，其中 a，b 为正整数. 求 $a+b$ 的值.

3. 同 A 组第 1 题

4. 同 A 组第 2 题

5. 同 A 组第 3 题

6. 同 A 组第 4 题

7. 同 A 组第 5 题

8. 同 A 组第 6 题