用局部不等式证明一道新题

2026-06-04 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_fcb0380147b97b9a

今天傍晚，吴黎老师在赛题讨论群发了一道原创新题，题目如下：

设 $n\geqslant 4$，$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，下标按模 n 循环（即 $x_0=x_n$，$x_{n+1}=x_1$）. 求最大常数 k_n，使得对任意满足条件的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，恒有

$\sum_{i=1}^n x_i\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i+1}}\geqslant k_n\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{x_i+x_{i+1}}$.

以下为我的解答：

令 $x_1=x_2=1$，$x_k=\varepsilon^k$，$\forall 3\leq k\leq n$，并令 $\varepsilon\to 0_+$，可得 $k_n\leq 2$.

下证：

$\sum_{i=1}^n x_i\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i+1}}\geqslant 2\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{x_i+x_{i+1}}$.

引理：$a,b,c>0$，则 $\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{4a}{a+b}+\dfrac{4c}{b+c}\geq 3$.

由 $\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{4a}{a+b}+\dfrac{4c}{b+c}\geq\dfrac{(b+2a+2c)^2}{b(a+c)+a(a+b)+c(b+c)}$ 只需证明：

$$(b+2a+2c)^2\geqslant 3(a^2+c^2+2ab+2bc)$$

$$\iff (a-b+c)^2+6ac\geqslant 0$$

引理成立，回到原题.

记 $S=\sum\limits_{i=1}^n x_i$，原不等式

$$\iff S\cdot\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i+1}}\geqslant 2\sum_{i=1}^n\left(x_i+x_{i+1}-\frac{4x_ix_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}\right)$$

$$\iff \sum_{i=1}^n\frac{Sx_i}{x_i+x_{i+1}}+8\sum_{i=1}^n\frac{x_ix_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}\geq 4\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\iff \sum_{i=1}^n\left(\frac{S}{x_{i-1}+x_{i+1}}+\frac{4x_{i-1}}{x_{i-1}+x_i}+\frac{4x_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}\right)\cdot x_i\geqslant\sum_{i=1}^n 4x_i$$

由 $S\geq x_{i-1}+x_i+x_{i+1}$ 和引理即证.