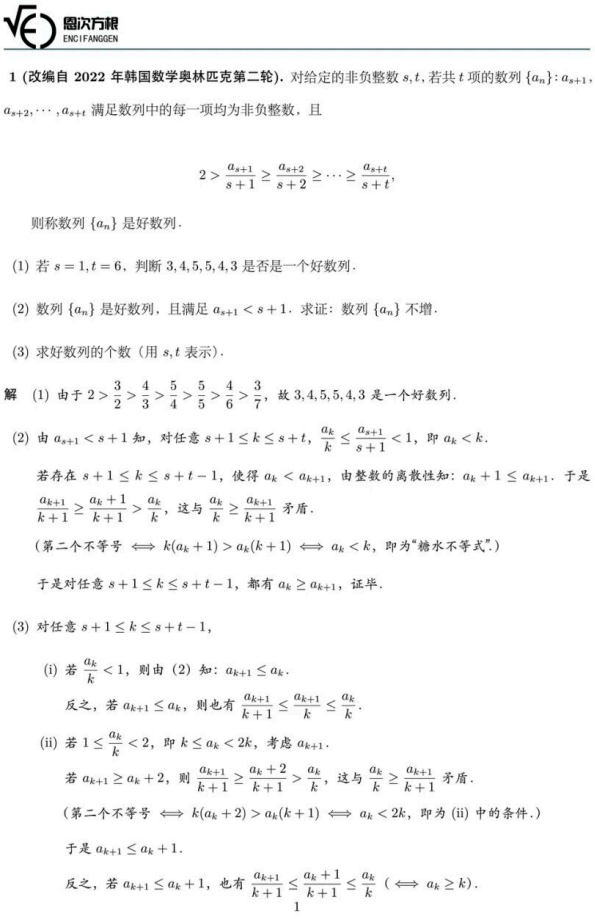
昨天题目的解答

2025-02-26　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_fcb066959a52ad37

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。



恩次方根
ENCIFANGGEN

1（改编自 2022 年韩国数学奥林匹克第二轮）. 对给定的非负整数 s,t，若共 t 项的数列 $\{a_n\}$：a_{s+1}，$a_{s+2},\cdots,a_{s+t}$ 满足数列中的每一项均为非负整数，且

$$2>\frac{a_{s+1}}{s+1}\geq\frac{a_{s+2}}{s+2}\geq\cdots\geq\frac{a_{s+t}}{s+t},$$

则称数列 $\{a_n\}$ 是好数列.

(1) 若 $s=1,t=6$，判断 $3,4,5,5,4,3$ 是否是一个好数列.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 是好数列，且满足 $a_{s+1}<s+1$. 求证：数列 $\{a_n\}$ 不增.

(3) 求好数列的个数（用 s,t 表示）.

解 (1) 由于 $2>\frac{3}{2}>\frac{4}{3}>\frac{5}{4}>\frac{5}{5}>\frac{4}{6}>\frac{3}{7}$，故 $3,4,5,5,4,3$ 是一个好数列.

(2) 由 $a_{s+1}<s+1$ 知，对任意 $s+1\leq k\leq s+t$，$\frac{a_k}{k}\leq\frac{a_{s+1}}{s+1}<1$，即 $a_k<k$.

若存在 $s+1\leq k\leq s+t-1$，使得 $a_k<a_{k+1}$，由整数的离散性知：$a_k+1\leq a_{k+1}$. 于是 $\frac{a_{k+1}}{k+1}\geq\frac{a_k+1}{k+1}>\frac{a_k}{k}$，这与 $\frac{a_k}{k}\geq\frac{a_{k+1}}{k+1}$ 矛盾.

（第二个不等号 $\Longleftrightarrow k(a_k+1)>a_k(k+1)\Longleftrightarrow a_k<k$，即为“糖水不等式”.）

于是对任意 $s+1\leq k\leq s+t-1$，都有 $a_k\geq a_{k+1}$，证毕.

(3) 对任意 $s+1\leq k\leq s+t-1$，

(i) 若 $\frac{a_k}{k}<1$，则由 (2) 知：$a_{k+1}\leq a_k$.

反之，若 $a_{k+1}\leq a_k$，则也有 $\frac{a_{k+1}}{k+1}\leq\frac{a_{k+1}}{k}\leq\frac{a_k}{k}$.

(ii) 若 $1\leq\frac{a_k}{k}<2$，即 $k\leq a_k<2k$，考虑 a_{k+1}.

若 $a_{k+1}\geq a_k+2$，则 $\frac{a_{k+1}}{k+1}\geq\frac{a_k+2}{k+1}>\frac{a_k}{k}$，这与 $\frac{a_k}{k}\geq\frac{a_{k+1}}{k+1}$ 矛盾.

（第二个不等号 $\Longleftrightarrow k(a_k+2)>a_k(k+1)\Longleftrightarrow a_k<2k$，即为 (ii) 中的条件.）

于是 $a_{k+1}\leq a_k+1$.

反之，若 $a_{k+1}\leq a_k+1$，也有 $\frac{a_{k+1}}{k+1}\leq\frac{a_k+1}{k+1}\leq\frac{a_k}{k}$（$\Longleftrightarrow a_k\geq k$）.

1

恩次方根
ENCIFANGGEN

综上可得，若数列 $\{a_n\}$ 满足

$$2>\frac{a_{s+1}}{s+1}\geq\cdots\geq\frac{a_i}{i}>1=\frac{a_{i+1}}{i+1}=\cdots=\frac{a_j}{j}>\frac{a_{j+1}}{j+1}\geq\cdots\geq\frac{a_{s+t}}{s+t}.$$

其中 $s\leq i\leq j\leq s+t$（若 $i=s$，则表示 $\frac{a_{s+1}}{s+1}\leq 1$）.

则 $\{a_n\}$ 为好数列的充要条件是：

(a) $j\geq a_{j+1}\geq\cdots\geq a_{s+t}\geq 0$，由整数的离散性，这等价于

$0\leq a_{s+t}<a_{s+t-1}+1<a_{s+t-2}+2<\cdots<a_{j+1}+(s+t-j-1)\leq s+t-1$，即在 $0,1,\cdots,s+t-1$ 中任意选取 $(s+t)-(j+1)+1=s+t-j$ 个不同的正整数，共有 $\mathrm{C}_{s+t}^{s+t-j}=\mathrm{C}_{s+t}^{j}$ 种不同的取法.

(b) $2s+1\geq a_{s+1}\geq a_{s+2}-1\geq\cdots\geq a_i-(i-s-1)>s+1$，由整数的离散性，这等价于

$2s+1\geq a_{s+1}>a_{s+2}-2>a_{s+3}-4>\cdots>a_i-2(i-s-1)\geq 2s+3-i$，即在 $2s+3-i,2s+4-i,\cdots,2s+1$ 中任意选取 $i-(s+1)+1=i-s$ 个不同的正整数，共有 $\mathrm{C}_{i-1}^{i-s}=\mathrm{C}_{i-1}^{s-1}$ 种不同的取法.

于是好数列的个数为

$$\begin{aligned}\sum_{s\leq i\leq j\leq s+t}\mathrm{C}_{s+t}^{j}\mathrm{C}_{i-1}^{s-1}&=\sum_{j=s}^{s+t}\left(\mathrm{C}_{s+t}^{j}\cdot\sum_{i=s}^{j}\mathrm{C}_{i-1}^{s-1}\right)=\sum_{j=s}^{s+t}\mathrm{C}_{s+t}^{j}\cdot\mathrm{C}_{j}^{s}=\sum_{j=s}^{s+t}\mathrm{C}_{s+t}^{s}\cdot\mathrm{C}_{t}^{j-s}\\&=\mathrm{C}_{s+t}^{s}\cdot\sum_{j=s}^{s+t}\mathrm{C}_{t}^{j-s}=\mathrm{C}_{s+t}^{s}\cdot\sum_{j=0}^{t}\mathrm{C}_{t}^{j}=\mathrm{C}_{s+t}^{t}\cdot 2^t.\end{aligned}$$

其中用到了熟知的组合恒等式：$\sum_{i=s}^{j}\mathrm{C}_{i-1}^{s-1}=\mathrm{C}_{j}^{s}$ 和 $\mathrm{C}_{s+t}^{j}\cdot\mathrm{C}_{j}^{s}=\mathrm{C}_{s+t}^{s}\cdot\mathrm{C}_{t}^{j-s}$，证明在此略去.