2021 年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

2021-05-24　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_fcb47ec0f382ed53

2021 年全国高中数学联赛

（四川预赛）试题

考试时间：2021 年 5 月 23 日 14 : 30 − 16 : 30

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 过抛物线 $y=x^2$ 上两点 $A(1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 分别作抛物线的切线 l_1,l_2，l_1 与 l_2 交于点 C. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则 $x_2=$_____.

2. 已知在凸五边形 $ABCDE$ 中，$DE\parallel AC$，$\angle ADC=90^\circ$，$AC=12$，$CD=6$，AC 平分 $\angle DAB$，$\angle BCE=60^\circ$. 则 $\triangle BCE$ 面积的最小值为 _____.

3. 已知在三棱锥 $D-ABC$ 中，$\angle ACB=\angle ABD=90^\circ$，$CA=CB$，$\angle BAD=30^\circ$. 若点 C 在平面 ABD 上的射影恰好在 AD 上，则二面角 $C-AB-D$ 的平面角的正弦值大小为 _____.

4. 设 x,y,z 为正实数，$M=\max\{xy+\dfrac{2}{z},z+\dfrac{2}{y},y+z+\dfrac{1}{x}\}$. 则 M 的最小值为 _____.

5. 设函数 $f(x)=x-\ln(ax+2a+1)+2$. 若对于任意 $x\geq -2$，均有 $f(x)\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 _____.

6. $\sum\limits_{k=0}^{2022} C_{2022}^k\cos\dfrac{(1011-k)\pi}{2}$ 的值为 _____.

7. 设集合 $T=\{(a,b,c)|a,b,c\in\mathbb{N}^*,$ 且 a,b,c 可构成某个三角形的三边长 $\}$. 则 $\sum\limits_{(a,b,c)\in T}\dfrac{2^a}{3^b\cdots 5^c}$ 的值为 _____.

8. 在一个 3×3 的方格表中，若 9 个小方格中的每一个均被染成红、黄、蓝、紫四种颜色之一，任意两个有公共边的小方格的染色均不相同，且该方格表中恰有 2 个小方格染蓝色，则符合条件的染色方法种数为 _____.（用具体数字作答）

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

1. （**本题满分 16 分**）已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两顶点为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$. 点 P（不同于 A、B）在椭圆 Γ 上，点 D 的坐标为 $(-4,0)$，$\overrightarrow{DE}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{DP}$，直线 AP 与 BE 交于点 Q. 求点 Q 的轨迹方程.

2. （**本题满分 20 分**）给定正整数 a，b，其中 $a < b$. 数列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1 = a$，$F_2 = b$，$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \in \mathbb{N}^*)$，若不存在无穷多个正整数 k，使得 $1 + mF_kF_{k+2}$ 为完全平方数，则称 m 具有性质 P. 求证：存在无穷多个正整数 m 具有性质 P.

3. （**本题满分 20 分**）求最大的正整数 n，使得对满足 $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$ 的任意正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，均有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq 2 \sum_{i=1}^{n} a_i$$

恒成立，其中 $a_{n+1} = a_1$.