本届东南数学奥林匹克部分题目讲解

2024-07-31 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_fd39cdcfe793274f

今晚给学生讲了东南数学奥林匹克（CSMO）的其中几道题，这里做个简单记录。（学生只学了代数和几何，所以挑了下面几题）

暑假上课比较忙，只截图不码字了。

高二组第一天第 2 题

2. 设 $a,b,c,d\in(0,1)$，满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=3$. 求证：

$$\frac{1-a^2}{b+c}+\frac{1-b^2}{c+d}+\frac{1-c^2}{d+a}+\frac{1-d^2}{a+b}<\frac{2}{3}.$$

这题我没想到将分母的 $a+b$ 直接放成 a^2+b^2，而是先用

$\frac{4}{a+b}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

作了分离，反而得到了一个更强的结果：

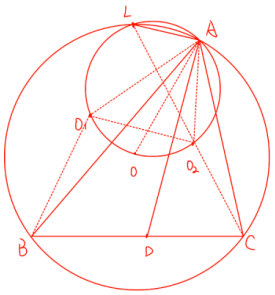
证明

$$4\sum_{cyc}\frac{1-a^2}{b+c}\le\sum_{cyc}(1-a^2)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2\sum\frac{1}{a}-\sum_{cyc}\frac{c^2+d^2}{a}=\sum_{cyc}\frac{2-c^2-d^2}{a}$$
$$=\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2-1}{a}=\sum a-\sum_{cyc}\frac{1-b^2}{a}<\sqrt{4\sum a^2}-\sum(1-a^2)=2\sqrt{3}-1<\frac{8}{3}$$

高一组第二天第 1 题

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，O 为外心. 设 D 为边 BC 上一点，O_1,O_2 分别为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的外心，$\triangle AO_1O_2$ 的外接圆与 $\odot O$ 交于不同于点 A 的点 L.
求证：A,O,D 三点共线当且仅当 $AL\parallel BC$.

一个经典结构，利用外心导角，可以得到很多性质，如：L,O_1,B 和 L,O_2,C 分别三点共线，$\triangle AO_1O_2$ 和 $\triangle ABC$ 相似，A,L,O_1,O,O_2 五点共圆。证明如下：



$\angle AO_1B=360^\circ-2\angle ADB=2\angle ADC=\angle AO_2C$

$\Rightarrow\triangle AO_1B\backsim\triangle AO_2C\Rightarrow\triangle AO_1O_2\backsim\triangle ABC.$

故 $\angle ALO_2=\angle AO_1O_2=\angle ABC=\angle ALC$.

$\Rightarrow L,O_2,C$ 三点共线.

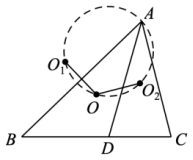
$\therefore AL\parallel BC\Leftrightarrow\angle ALO_2=\angle BCO_2\Leftrightarrow\angle ABC=90^\circ-\angle CAD$

$\Leftrightarrow\angle CAD=\angle CAO\Leftrightarrow A,O,D$ 三点共线

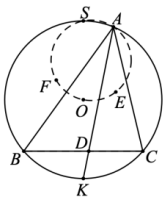
两道类似题：

4．已知 D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点，O、O_1、O_2 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的外心．

（1）求证：A、O、O_1、O_2 四点共圆．（2）当 AD 平分 $\angle BAC$ 时，求证：$OO_1=OO_2$

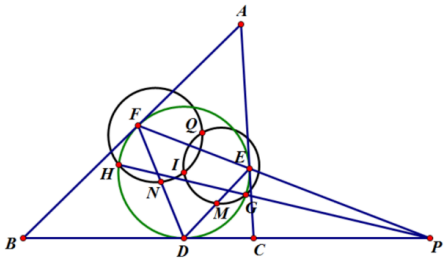


5．设 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 上的劣弧 BC 的中点为 K，优弧 BAC 的中点为 S，线段 AK 与 BC 边交于点 D，点 E、F 分别为 $\triangle ACD$、$\triangle ABD$ 的外心．试证：A、E、O、F、S 五点共圆．



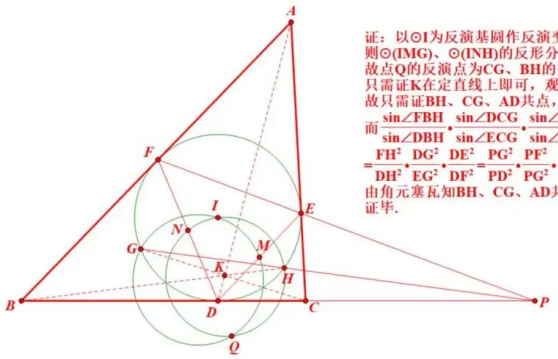
高二组第二天第 1 题

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，$\triangle ABC$ 的内切圆 I 分别切边 BC,CA,AB 于点 D,E,F. 设 M 为 DE 中点，N 为 DF 中点，直线 FE 与 BC 相交于点 P. 过点 P 作动直线 l 交内切圆 I 于不同的两点 G,H，且 I,M,G 和 I,N,H 均不共线，$\triangle IMG$ 的外接圆与 $\triangle INH$ 的外接圆交于不同于 I 的一点 Q. 求证：点 Q 始终在一个定圆上.



也是经典结构，利用内切圆反演即可，放一个刘小平老师的做法：

△ABC中，AB>AC，内切圆⊙I分别与BC、CA、AB切于点D、E、F，M是DE的中点，N是DF的中点，EF、BC交于P，过P作动直线交⊙I于两点G、H，且I、M、G；I、N、H不共线，⊙(IMG)、⊙(INH)交于另一点Q.
求证：Q始终在一个定圆上.（2024东南赛高二第5题）



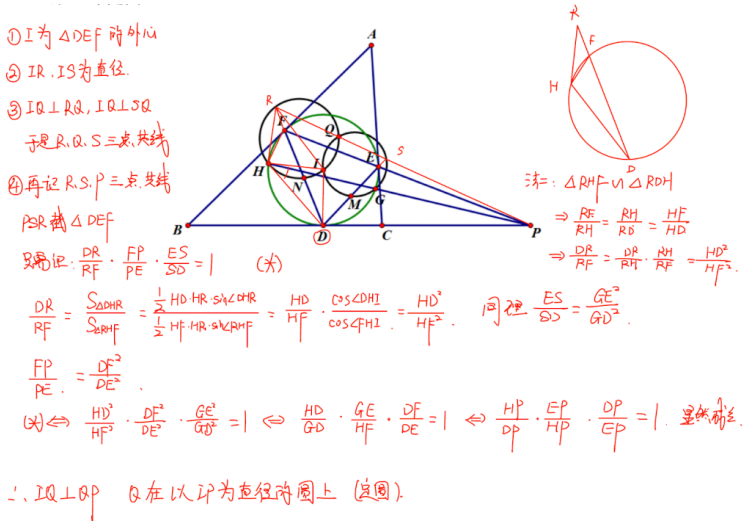
证：以⊙I为反演基圆作反演变换，
则⊙(IMG)、⊙(INH)的反形分别为直线CG、BH，
故点Q的反演点为CG、BH的交点K，
只需证K在定直线上即可，观察得只需证K在AD上，
故只需证BH、CG、AD共点，

而 $\frac{\sin\angle FBH}{\sin\angle DBH}\cdot\frac{\sin\angle DCG}{\sin\angle ECG}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}$

$=\frac{FH^2}{DH^2}\cdot\frac{DG^2}{EG^2}\cdot\frac{DE^2}{DF^2}\cdot\frac{PG^2}{PD^2}\cdot\frac{PF^2}{PG^2}\cdot\frac{DE^2}{DF^2}=1$，

由角元塞瓦知BH、CG、AD共点，
证毕.

我的做法如下，思路起点是利用中点 M,N 找到垂直关系，从而作出两个小圆的直径，发现 R,Q,S 三点共线，由此自然想到证明 P 也在这条线上，从而由 $IQ\perp PQ$ 知 Q 在以 IP 为直径的定圆上：



（当场讲的，开始算 $\frac{DR}{RF}$ 还用面积去导了，猛然发现就是一个切割线的母子相似，后面就很顺利地做出来了）