升高维度，解决问题

2022-10-15　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_fe432043ca764654

本文整理自今天的上课笔记，就不再重新用电脑画图了。

先来看一道简单的题目：

A、B、C 在一条直线上顺次排列，P 为 AC 中点，Q 为 BC 中点. 求证：$PQ=\frac{1}{2}AB$.

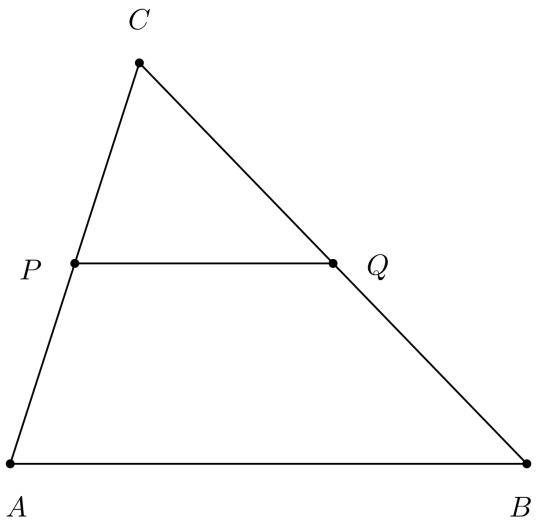


证明：

$$PQ=CP-CQ=\frac{1}{2}CA-\frac{1}{2}CB=\frac{1}{2}AB$$

如果我们把第一个条件“A、B、C 三点共线”去掉，则从直线（一维）上变成平面（二维）上的问题.

P 为 AC 中点，Q 为 BC 中点. 求证：$PQ=\frac{1}{2}AB$.



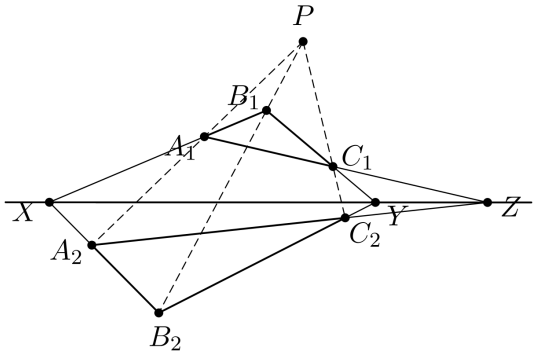
容易看出，此时 PQ 为 $\triangle ABC$ 的一条中位线，结论显然成立.

事实上，我们可以将点 C 不断移动，使其趋于直线 AB 上，在此过程中 $PQ=\dfrac{1}{2}AB$ 始终成立. 由于变化过程是**连续**的，故当 C 移动到直线 AB 上时，结论也依然成立.（注：这里的说明不太严谨，只是为了方便理解）

因此，我们利用二维中的一个 “显然” 的结论，证明了一维中的问题.

我们再来看一道平面几何问题.

> **（笛沙格定理）** $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 对应顶点连线交于一点 P，且对应边不平行. 则对应边交点 X、Y、Z 三线共点.



证明：

由 PA_1A_2 截 $\triangle XB_1B_2$，有

$$\frac{XA_1}{A_1B_1}\cdot\frac{B_1P}{PB_2}\cdot\frac{B_2A_2}{A_2X}=1$$

由 PC_1C_2 截 $\triangle YB_1B_2$，有

$$\frac{B_1C_1}{C_1Y}\cdot\frac{YC_2}{C_2B_2}\cdot\frac{B_2P}{PB_1}=1$$

设 $A_1C_1\cap XY=Z'$，由 A_1C_1Z' 截 $\triangle BXY$，有

$$\frac{B_1A_1}{A_1X}\cdot\frac{XZ'}{Z'Y}\cdot\frac{YC_1}{C_1B_1}=1$$

三式相乘并约分得：

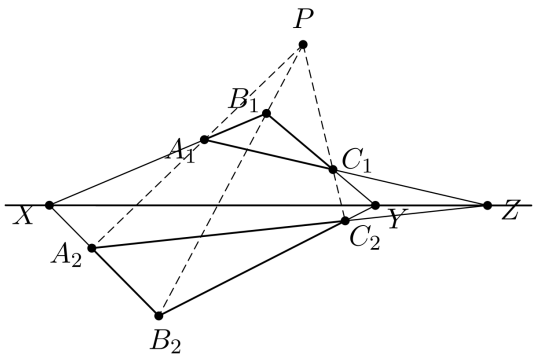
$$\frac{B_2A_2}{A_2X}\cdot\frac{XZ'}{Z'Y}\cdot\frac{YC_2}{C_2B_2}=1$$

于是 A_2、C_2、Z' 三点共线，即 Z 和 Z' 重合.

因此 X、Y、Z 三线共点. 证毕.

我们继续用升高维度的方法来看这题.

> 空间中两个三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 对应顶点连线交于一点 P，且对应边不平行. 则对应边交点 X、Y、Z 存在，且三线共点.



将上图看成平面 $A_1B_1C_1$ 截三棱锥 $P-A_2B_2C_2$. 证明 A_1B_1 和 A_2B_2 的交点 X、B_1C_1 和 B_2C_2 的交点 Y、C_1A_1 和 C_2A_2 的交点 Z（当然，要先说明三个交点都存在），这三点共线.

证明：

由 $A_1A_2\cap B_1B_2=P$ 知 A_1，A_2，B_1，B_2 四点共面. 由 A_1B_1 和 A_2B_2 不平行知，A_1B_1 和 A_2B_2 相交. 设 $A_1B_2\cap A_2B_2=X$，平面 $A_1B_1C_1$ 为 α_1，平面 $A_2B_2C_2$ 为 α_2.

于是 $X\in A_1B_1$，又 $A_1B_1\subset\alpha_1$，因此 $X\in\alpha_1$，同理 $X\in\alpha_2$.

所以 $X \in \alpha_1 \cap \alpha_2$，同理 $Y \in \alpha_1 \cap \alpha_2$，$Z \in \alpha_1 \cap \alpha_2$.

从而 X、Y、Z 都在 $\alpha_1 \cap \alpha_2$ 上，而由公理

如果两个平面有公共点，那么这两个平面的所有公共点的集合是一条直线.

知 $\alpha_1 \cap \alpha_2$ 为一条直线，所以 X、Y、Z 三点共线，证毕.

同前面的分析，我们可以让点 P 不断移动，并且趋于平面 $A_2B_2C_2$ 上，同理可得二维的结论依然成立.

这样的升高维度，将一道竞赛难度的平面几何问题变成了刚学高中立体几何就能立马解决的问题。由此可以看出升高维度对解决问题所起的积极作用。

事实上，将问题放在更高维度中解决，是一个常用的好方法。试想一下，如果在桌面上由一团乱糟糟的线，要将它们理顺是非常困难的。但如果将线拿起来放在空中，让它们之间产生更多的空隙，这样线团的结构就更加清晰明了了。上面两个例子的原理也正是如此。

参考阅读

高维庞加莱猜想

这一时期拓扑学家对庞加莱猜想的研究，虽然没能产生他们所期待的结果，但是，却因此发展出了低维拓扑学这门学科。一次又一次尝试的失败，使得庞加莱猜想成为出了名难证的数学问题之一。然而，因为它是几何拓扑研究的基础，数学家们又不能将其撂在一旁。这时，事情出现了转机。

斯梅尔（Smale）在 60 年代初想到了一个天才的主意：如果三维的庞加莱猜想难以解决，高维的会不会容易些呢?

1960 年到 1961 年，在里约热内卢的海滨，经常可以看到一个人，手持草稿纸和铅笔，对着大海思考。他，就是斯梅尔。

1961 年的夏天，在基辅的非线性振动会议上，斯梅尔公布了自己对庞加莱猜想的五维空间和五维以上的证明，立时引起轰动。斯梅尔由此获得 1966 年菲尔兹奖。

1983 年，美国数学家福里德曼（Freedman）将证明又向前推动了一步。在唐纳森工作的基础上，他证出了四维空间中的庞加莱猜想，并因此获得菲尔茨奖。但是，再向前推进的工作，又停滞了。

拓扑学的方法研究三维庞加莱猜想没有进展，有人开始想到了其他的工具。瑟斯顿（Thruston）就是其中之一。他引入了几何结构的方法对三维流形进行切割，并因此获得了 1983 年的菲尔茨奖。

“就像费马大定理，当谷山志村猜想被证明后，尽管人们还看不到具体的前景，但所有的人心中都有数了。因为，一个可以解决问题的工具出现了。” 清华大学数学系主任文志英说。