用向量法证明一个“七心连珠”结论

2026-07-23　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_fee2a0592a8190bc

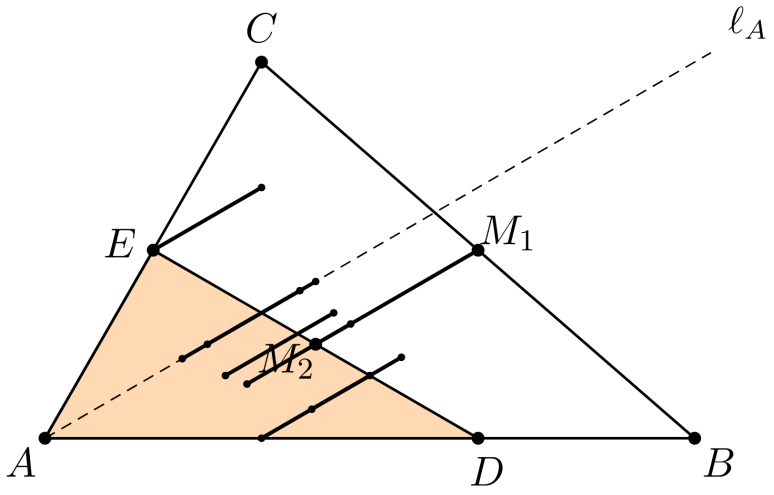
本问题是我在中学时代参加外培时首次听到，时隔多年，只记得这个美妙的结论（其实现在来看是比较平凡的）与“七心连珠”这个名字了．昨天上课时突然想起，用向量法给学生讲了一个简单的证明．

“七心连珠”问题叙述

在 $\triangle ABC$ 中，D, E 分别在边 AB, AC 上，且满足 $BD = CE$．设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 的内心、外心、重心、垂心、九点圆圆心、Spieker 点、Nagel 点依次记为

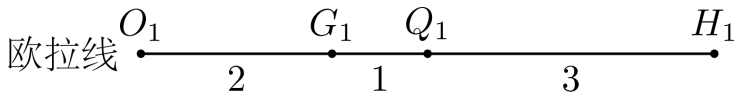
$$I_i,\ O_i,\ G_i,\ H_i,\ Q_i,\ S_i,\ T_i \qquad (i = 1, 2).$$

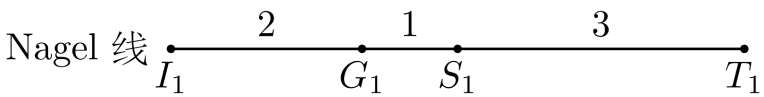
则七组对应点的连线彼此平行，且都平行于 $\angle A$ 的内角平分线．



一、简化问题

熟知欧拉线上的 O_i, G_i, Q_i, H_i 与第二欧拉线（Nagel 线）上的 I_i, G_i, S_i, T_i 分别共线，且相应分点比固定（留给读者自行证明）．故只需证明外心、内心、重心三组对应连线平行．



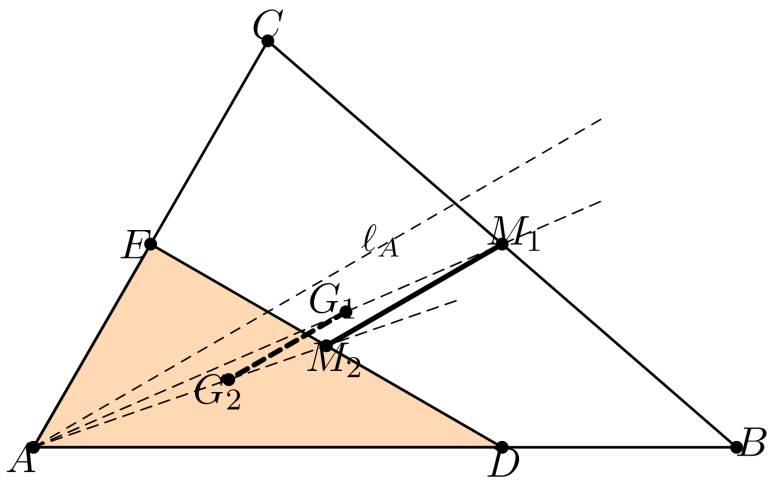


令 M_1, M_2 分别为 BC, DE 的中点．重心把中线按 $2:1$ 分点，故

$\frac{AG_1}{AM_1}=\frac{AG_2}{AM_2}=\frac{2}{3}$.

以 A 为中心、比例 $2/3$ 的同一位似把 M_1,M_2 分别变为 G_1,G_2，所以

$$G_1G_2 \parallel M_1M_2. \tag{1}$$



二、中点连线与内心连线

设 $AB=c,\ AC=b,\ BD=CE=t$，并以 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 表示沿 AB,AC 的单位向量. 则

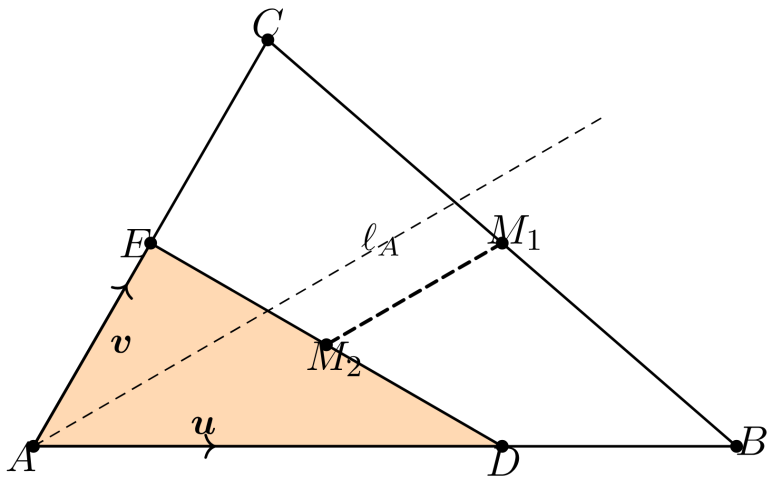
$\overrightarrow{M_2M_1}=\frac{1}{2}\big[c\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}-(c-t)\boldsymbol{u}-(b-t)\boldsymbol{v}\big]=\frac{t}{2}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$.

因 $|\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{v}|=1$，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 指向 $\angle A$ 的内角平分线，故

$$M_1M_2 \parallel G_1G_2 \parallel \ell_A. \tag{2}$$

又 $I_1,I_2\in\ell_A$，所以

$$I_1I_2 \subset \ell_A. \tag{3}$$



三、外心连线

以 A 为原点，令

$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{AO_1},\qquad \boldsymbol{q}=\overrightarrow{AO_2},\qquad \boldsymbol{w}=\overrightarrow{O_2O_1}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}.$

由外心到顶点等距，

$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{c}{2},\qquad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{b}{2},\qquad \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{c-t}{2},\qquad \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{b-t}{2}.$

故

$\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=0.$

又

$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=0,$

于是

$$O_1O_2\parallel\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\parallel\ell_A. \tag{4}$$

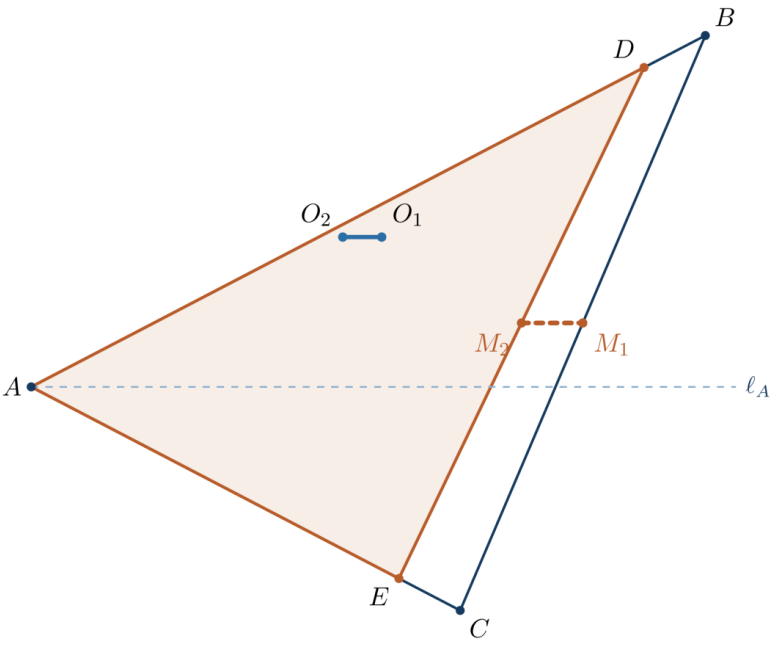


图 4　$O_1O_2 \parallel M_1M_2 \parallel \ell_A$

四、结论

由 (1)–(4)，

$O_1O_2 \parallel I_1I_2 \parallel G_1G_2 \parallel \ell_A$.

再利用欧拉线与 Nagel 线上的固定分点关系，其余四组对应连线也继承同一方向. 因此

$\boxed{I_1I_2 \parallel O_1O_2 \parallel G_1G_2 \parallel H_1H_2 \parallel Q_1Q_2 \parallel S_1S_2 \parallel T_1T_2 \parallel \ell_A}$.