# 欧拉分解公式的若干应用

2021-04-05　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ff3e670e9d6bae99

**欧拉分解公式**:

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
=&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
=&\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\\
=&(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)\\
=&\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

其中 $\omega$ 为 $x^2+x+1=0$ 的根.

由上述公式可以很快推出三元形式的算术-几何均值不等式:

$a,b,c\geq 0$ 时，$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$.

特别地，当 $a+b+c=0$ 时，有 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

下面来看几道与欧拉分解公式有关的题目:

1. 正实数 $x$ 满足

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000,$$

求证: $x+y=10$.

**证明**

$$\begin{aligned}
&x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000\\
\Longleftrightarrow\ &x^3+y^3+(-10)^3-3xy\cdot(-10)\\
&=10^3-(x+y)^3\\
\Longleftrightarrow\ &(x+y-10)(x^2+y^2+100-xy+10x+10y)\\
&=-(x+y-10)\left[(x+y)^2+10(x+y)+10\right]
\end{aligned}$$

于是 $x+y=10$ 或

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+100-xy+10x+10y\\
=&-(x+y)^2-10(x+y)-100\\
\Longleftrightarrow\ &2x^2+2y^2+xy+20x+20y+200=0\\
\Longleftrightarrow\ &(x+10)^2+(y+10)^2+(x^2+xy+y^2)=0
\end{aligned}$$

后一式子显然不成立，于是 $x+y=10$.

1. 已知实数 $a,b,c$ 满足 $abc=-1$，$\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b}{c^2}=1$，求 $ab^5+bc^5+ca^5$ 的值.

**解**设 $a=-\dfrac{q}{p}$，$b=-\dfrac{r}{q}$，则 $c=-\dfrac{p}{r}$.
由 $\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b}{c^2}=1$ 得 $a^2c+b=c^2$，即

$$\left(-\frac{q}{p}\right)^2\cdot\left(-\frac{p}{r}\right)+\left(-\frac{r}{q}\right)=\left(-\frac{p}{r}\right)^2$$

即

$$p^3q+q^3r+r^3p=0.$$

而

$$\begin{aligned}&ab^5+bc^5+ca^5\\=&\left(-\frac{q}{p}\right)\cdot\left(-\frac{r}{q}\right)^5+\left(-\frac{r}{q}\right)\cdot\left(-\frac{p}{r}\right)^5+\left(-\frac{p}{r}\right)\cdot\left(-\frac{q}{p}\right)^5\\=&\frac{r^5}{pq^4}+\frac{p^5}{qr^4}+\frac{q^5}{rp^4}\\=&\frac{p^9q^3+q^9r^3+r^9p^3}{p^4q^4r^4}\end{aligned}$$

由于

$$x+y+z=0\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

故

$$\begin{aligned}&p^9+q^3+q^9r^3+r^9p^3\\=&(p^3q)^3+(q^3r)^3+(r^3p)^3\\=&3\cdot p^3q\cdot q^3r\cdot r^3p\\=&3p^4q^4r^4\end{aligned}$$

即 $ab^5+bc^5+ca^5=3$.

1. 因式分解：$x^3-18x+35$.

**解**

$$\begin{aligned}&x^3-18x+35\\=&x^3+2^3+3^3-3x\cdot2\cdot3\\=&(x+2+3)(x^2+2^2+3^2-2x-3x-2\cdot3)\\=&(x+5)(x^2-5x+7)\end{aligned}$$

从上题可以看出，欧拉分解公式在处理三次多项式的因式分解问题中，能够发挥一定的作用．事实上，用上题的方法，我们可以推出一元三次方程的求根公式（卡丹公式）.
首先对于一般的一元三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$$

我们可以同除以系数 $a$，再作代换 $z=x+\dfrac{b}{3a}$，将方程变为

$$x^3-3px+q=0$$

的形式.
下设 $u,v$ 满足 $u^3+v^3=q$，$uv=p$．即 $u^3+v^3=q$，$u^3v^3=p^3$.
于是 $u^3$，$v^3$ 为 $t^2-qt+p=0$ 的两根．可解得：

$$u=\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2-4p^3}}{2}},v=\sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2-4p^3}}{2}}.$$

则

$$\begin{aligned}&x^3-3px+q\\=&x^3+u^3+v^3-3xuv\\=&(x+u+v)(x+\omega u+\omega^2v)(x+\omega^2u+\omega v)\end{aligned}$$

故方程 $x^3-3px+q=0$ 的三个解为

$$\begin{aligned}x_1&=-u-v\\x_2&=-\omega u-\omega^2v\\x_3&=-\omega^2u-\omega v\end{aligned}$$

其中

$$u=\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2-4p^3}}{2}},v=\sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2-4p^3}}{2}}.$$

此即为卡丹公式.

欧拉分解公式还出现在很多初高中数学竞赛的很多代数题中，其结构大多比较明显，在使用该公式进行分解后往往会将问题大幅简化，是代数恒等变形中的一大利器.