数学竞赛每日一练第 6 期解答

2021-06-09 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID wx_i-i3taJlpzd7SvjoLHab6g

本期解答根据同系列资料补录，解题过程经过转写并补全一处推理；文字可能与当年的公众号推送不同。题目与结论未改。

题目来源：2021 年马其顿数学奥林匹克——中文翻译。

在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，且 $\angle BCD<\angle ABC<90^\circ$。设 E 为对角线 AC 和 BD 的交点。$\triangle BEC$ 的外接圆 ω 在 X 处与线段 CD 相交。AX 和 BC 交于点 Y，BX 和 AD 交于点 Z。求证：EZ 和 ω 相切的充要条件为 BE 和 $\triangle BXY$ 的外接圆相切。

注．原文在「所以,」处缺失了过渡的一步，而这一步正是全题的枢纽。以下按原文转写，并把缺失的推理补全。

解答（PDF 中已展开）

解答以下角的关系均按有向角（模 180°）理解。因为 E、B、C、X 都在 ω 上，故同弦 XC 所对的圆周角相等，即 $\angle XEC=\angle XBC$。又 X、B、Z 共线，Z、D、A 共线，且 $AD\parallel BC$，故 $\angle XBC$ 与 $\angle XZD$ 是内错角，得 $\angle XEC=\angle XBC=\angle XZD$。由 E、C、A 共线及 Z、D、A 共线，上式即 $\angle XEA=\angle XZA$，故 A、Z、X、E 四点共圆。

于是同弦 ZX 所对的圆周角相等，得 $\angle ZEX=\angle ZAX$。再由 X、A、Y 共线，Y 在 BC 上，$AD\parallel BC$，得 $\angle ZAX$ 与 $\angle BYX$ 是内错角，故 $\angle ZEX=\angle ZAX=\angle BYX$。

所以 $\angle ZEX=\angle BYX$。注意到 $\angle ZEX$ 是弦 EX 与直线 EZ 的夹角，$\angle EBX$ 是 ω 上弦 EX 所对的圆周角；$\angle EBX$ 又是弦 BX 与直线 BE 的夹角，$\angle BYX$ 是 $\triangle BXY$ 外接圆上弦 BX 所对的圆周角。由弦切角定理，

$$ \begin{aligned} & EZ \text{ 与 } \omega \text{ 相切} \iff \angle ZEX=\angle EBX,\\ & BE \text{ 与 } \triangle BXY \text{ 的外接圆相切} \iff \angle EBX=\angle BYX. \end{aligned} $$

但 $\angle ZEX=\angle BYX$，故「EZ 与 ω 相切」与「BE 与 $\triangle BXY$ 的外接圆相切」互为充要条件。$\square$